Table des matières

1 Calculs **1**

2 Factorisation et simplification d'écriture **3**

3 Intervalle **3**

4 Equations et inéquations **4**

5 Etude de fonction **4**

6 Intégration **5**

7 Etude de suites **5**

1 Calculs

Pour les exercices 1 à 10, donner les résultats sous forme de fraction irréductible ou sous la forme la plus factorisée possible.

Exercice 1. Fractions

1. $\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{7}{5}-1+\frac{2}{3}\right)$.
2. $\frac{7}{3}\times\left(2+\frac{1}{7}\right)$.
3. $\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}$.
4. $\frac{\frac{3}{4}-\frac{5}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{5}{3}}$.
5. $\frac{1+\frac{3}{5}}{4-\frac{1}{2}}$.
6. $\frac{\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}-\frac{5}{4}}$.
7. $\frac{\frac{3}{16}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{12}+\frac{7}{20}}$.

Exercice 2. Fractions avec une inconnue

1. Pour $x\neq -2$, $3+\frac{5}{2+x}$.
2. Pour $x\neq 2$, $5+\frac{x+1}{x-2}$.
3. Pour $x\neq 3/2$ et $x\neq -5/4$, $\frac{-2x+3}{2x-3}+\frac{3x+7}{4x+5}$.
4. Pour $x\neq -1/2$ et $x\neq 2/3$, $\frac{x-2}{4x+2}-\frac{4x-1}{3x-2}+\frac{19x^2}{(4x+2)(3x-2)}$.

Exercice 3. Racine carrée

1. $4\sqrt{24}-5\sqrt{96}+4\sqrt{54}$.
2. $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}$.

3. $\dfrac{7}{2-\sqrt{7}}$.
4. $\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}+\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$.

Exercice 4. Puissances

1. $\dfrac{10^9 \times 6^3}{25^4 \times 3 \times 2^{11}}$.
2. $\dfrac{1}{10^{118}} - \dfrac{1}{10^{119}}$.
3. $5^{108} \times 2^{106} \times 11 \times \dfrac{1}{10^{107}}$.

Exercice 5. Puissances avec une inconnue

1. $\dfrac{(x\sqrt{x})^5}{(x^3 \times x)^2}$ avec $x > 0$.
2. $(-1)^{n-1} \times (-1)^n \times (-1)^{n+2}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Exponentielle

1. $\dfrac{e^5 \times e^{-2}}{e^4}$.
2. $\dfrac{e^{-2} \times e^7}{e^3 \times e^{-4}}$.

Exercice 7. Exponentielle avec une inconnue

1. $\dfrac{e^{-2x} \times e^{4x}}{e^{5x} \times e^{-6x}}$ avec $x \in \mathbb{R}$.
2. $\dfrac{e^{x-3} \times e^{4x}}{e^{1-3x}}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Propriétés du logarithme et de l'exponentielle

1. $\dfrac{\ln(16)+\ln(64)}{10\ln(2)}$.
2. $\ln\left(\dfrac{e^5 \times 12}{e^{-6}} \times e^2\right)$.

Exercice 9. Coefficients binomiaux

1. $\dbinom{8}{4}$.
2. $\dbinom{7}{3}$.
3. $\dbinom{12}{9}$.

Exercice 10. Factorielles

Soit $n \in \mathbb{N}$,

1. $\dfrac{(n+1)! - n!}{n}$.
2. $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}$.
3. $\dfrac{n+2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$.

Exercice 11. Suite définie par une factorielle

Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, b réels non nuls, on pose :

$$u_n = \frac{a^n}{n!b^{2n}}.$$

Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

2 Factorisation et simplification d'écriture

Exercice 12. Factorisation

Pour $x \in \mathbb{R}$, factoriser les expressions suivantes.

1. $(3x+5)(x-1)+(x-1)$.
2. $(5x-1)(2x+3)-5x+1$.
3. $(7x-2)(x-9)+14x-4$.
4. $(x+4)^2+(x-4)(x+4)+2x+8$.
5. $(2x+6)(x-5)+3x+9$.
6. $x^2-4x+4+(x+3)(x-2)$.
7. $(3x-2)(x+5)+9x^2-4$.
8. $\dfrac{25}{4}x^2-\dfrac{169}{144}$.
9. $\dfrac{81}{16}x^2-\dfrac{33}{2}x+\dfrac{121}{9}$.
10. $(3x-1)\left(4x+x^2\right)-3(3x-1)$.
11. $x^2-9+3(x-3)$.
12. x^3+x^2+x-3.

Exercice 13. Simplification d'exponentielles

Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$,

1. $\dfrac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{2}{e^x+1}$.
2. $\dfrac{2}{1+e^x}=2-\dfrac{2}{1+e^{-x}}$.
3. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
4. $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

3 Intervalle

Exercice 14. Encadrement

Soient x et y deux réels tels que

$$-2 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad -5 \leq y \leq 1,$$

donner un encadrement des quantités suivantes :

1. $x+3$.
2. $y+6$.
3. $(x+3)(y+6)$.
4. $(x+3)-(y+6)$.
5. $\dfrac{x+3}{y+6}$.
6. $2-x^2$.

Exercice 15. Intervalle

Dans chacun des cas, déterminer la valeur du nombre réel a et du nombre réel strictement positif r de telle sorte que l'intervalle s'écrive sous la forme $[a-r;a+r]$, puis écrire à l'aide de valeurs absolues ces intervalles.

1. $I=[2;4]$
2. $J=[4;10]$
3. $K=[-2;8]$
4. $L=[-12;-3]$

4 Equations et inéquations

Exercice 16. Résolution d'équations

Résoudre les équations suivantes

1. $3(x-3)+5 = 5\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{4}{3}\right)$.
2. $\dfrac{6x-1}{4x-1} = \dfrac{3x+1}{2x-5}$.
3. $\sqrt{x^2+9} = 5$.

Exercice 17. Résolution d'inéquations

Résoudre les inéquations suivantes

1. $\dfrac{x+3}{x-1} < \dfrac{x-4}{x+2}$.
2. $\sqrt{4-x} \leq x-7$.

5 Etude de fonction

Exercice 18. Composition de fonctions

1. Pour tout réel x, on pose :
$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x-1.$$
Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$.
2. Pour tout réel x, on pose :
$$f(x) = 1-x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(x).$$
Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$.

Exercice 19. Ensembles de définition

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x\ \ln(x)$.
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{9-x^2}{e^x-1}}$.

Exercice 20. Dérivées

Donner l'ensemble de définition et de dérivation de ces fonctions. Calculer également leur dérivée.

1. $f(x) = x\ \ln(x)$.
2. $f(x) = \ln\left(\ln(x)\right)$.
3. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$.
4. $f(x) = e^{x^2}$.
5. $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.
6. $f(x) = \left(x^2+x+1\right)\ e^{-x}$.

Exercice 21. Limites

Etudier les limites demandées.

1. $f(x) = 3x-2-4\ln(x)$ en $+\infty$.
2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)$ en $+\infty$.
3. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ en 0.
4. $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+\sin(x)\right)}{x}$ en 0.
5. $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln(x)}$ en $+\infty$.

Exercice 22. Inégalité

Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 1+x+\frac{x^2}{2} \leq e^x.$$

Exercice 23. Dérivées

Dans chaque cas, donner l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivation et la fonction dérivée.

1. $f(x) = \cos\left(3x^2+2\right)$.
2. $f(x) = 3\,\tan(x) - \cos(x)\,\sin(x)$.
3. $f(x) = \sqrt{x}\,\sin(x)$.
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 21}$.

Exercice 24. Inégalité

Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}\,x \leq \sin(x) \leq x$.

6 Intégration

Exercice 25. Primitives classiques

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \left(x^3 + 2x^2 + x + 1\right) dx$.
2. $\displaystyle\int_0^1 (2x-2)\left(x^2 - 2x + 1\right)^4 dx$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x-4} dx$.
4. $\displaystyle\int_1^2 \left(x^e - e^x\right) dx$.
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{8x+4}{x^2+x+1} dx$.
6. $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{-x^2} dx$.
7. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^x+2} dx$.
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Exercice 26. Intégrer dans une inégalité

1. Soit $x > 0$, montrer que $\forall t \in [0, x]$,
$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1.$$
2. En déduire que pour tout $x > 0$,
$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x.$$

Exercice 27. Simplifier pour trouver une limite

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1]$,
$$0 \leq x^n\,e^x \leq x^n\,e.$$
2. En déduire la limite de la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 x^n\,e^x\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

7 Etude de suites

Exercice 28. Limites

Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes.

1. $a_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$.
2. $b_n = \dfrac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$.
3. $c_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$.

Exercice 29. Suite arithmétique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

1. Ecrire u_n en fonction de u_0, r et n puis discuter de la convergence de (u_n).
2. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$,
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
3. En déduire
$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Exercice 30. Suite géométrique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q\, u_n.$$

1. Ecrire u_n en fonction de u_0, q et n puis discuter de la convergence de (u_n).
2. On pose :
$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$
Si $q \neq 1$, simplifier $(1-q)\, S_n$.
3. En déduire une expression de S_n en fonction de u_0, q et n et discuter de la convergence de la suite (S_n).

Exercice 31. Etude de suite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 1}.$$

1. Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 2.$$
2. Montrer que (u_n) est croissante puis qu'elle converge et déterminer sa limite.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$v_n = 1 - \frac{2}{u_n}.$$
Calculer v_0 et v_1.
4. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
5. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer en fonction de n
$$\frac{2}{u_0} + \frac{2}{u_1} + \cdots + \frac{2}{u_n}.$$

Exercice 32. Récurrence

Montrer par récurrence que
$$-1 + 2 - 3 + 4 - \cdots + (-1)^n n = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}.$$

Exercice 33. Série harmonique

Soit (u_n) la suite définie par
$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que
$$u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}.$$
2. Si (u_n) converge, que dire de (u_{2n}) ? En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.